人口統計(Demography)

授課教師：余清祥教授

日期：2023年3月31日

第四講：生命表(Life Table)

http://csyue.nccu.edu.tw

生命表(Life Table)

- 生命表(Life table)為計算生命函數（包括死亡率、平均壽命、……）的基礎表，根據一年或數年觀察時間之統計資料編算而成，通常分為國民生命表(Population Table)及經驗生命表(Experience Table) 。
- 在台灣地區國民生命表由政府部門修訂，經驗生命表由保險公司或其公會編纂。

生命表的歷史發展

- Earliest 'population' mortality records collected in the late 16^{th} century by local parishes.
- In 1662 Graunt carries out the first detailed investigation of mortality of Londoners.
- In 1693 Halley constructs the first 'life table' of Breslau.
- In 1746 Deparcieux uses a life table method to show increases in life expectancies.
- In 1766 Bernoulli first studies the properties of mortality intensity $\mu(x)$. Lambert in 1772 calls the inverse of this the 'force of vitality' and develops the earliest mathematical models for the survivor function $S(x)$.

生命表的歷史發展(續)

- In 1725 de Moivre first proposed a piecewise linear survivor function $S(x) - S(x+t) = a\,t$.
- In 1772 Lambert first expresses the gradual 'exhaustion of man's power' in a mathematical formula.
- In 1798 Malthus predicted exponential increase of human population with consequent misery and famine unless family size was regulated. The model was later adjusted by Verhulst in 1838, to limit the population growth predictions.
- In 1825 Gompertz proposed a survivor function which results in an exponentially rising mortality intensity. This model was later extended by Makeham in 1860 to allow for young mortality.
- In 1872 Thiele develops the first complex model that attempts to accurately model $\mu(x)$ over the whole life span.

- 生命表中與死亡相關的資料紀錄通常以兩種不同的方式來詮釋：

→決定性模型（Deterministic framework)

假設事件必定發生。

→隨機性模型（Stochastic framework）

假設事件發生的可能性為定值，但含有隨機的因素。

97年臺灣地區男性簡易生命表

年齡組	死亡機率	生存數	死亡數	定 常 人 口		平均餘命
X ~ (X+n)	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
0	0.00505	100000	505	99590	7556123	75.56
1 — 4	0.00164	99495	163	397600	7456533	74.94
5 — 9	0.00076	99331	75	496440	7058933	71.06
10 — 14	0.00083	99256	83	496121	6562493	66.12
15 — 19	0.00269	99174	267	495269	6066372	61.17
20 — 24	0.00379	98907	375	493625	5571103	56.33
25 — 29	0.00490	98532	483	491528	5077478	51.53
30 — 34	0.00789	98049	774	488455	4585950	46.77
35 — 39	0.01234	97275	1200	483583	4097495	42.12
40 — 44	0.01851	96075	1778	476169	3613911	37.62
45 — 49	0.02515	94297	2372	465807	3137743	33.28
50 — 54	0.03356	91926	3085	452242	2671936	29.07
55 — 59	0.04628	88840	4112	434446	2219694	24.99
60 — 64	0.06704	84729	5680	410141	1785248	21.07
65 — 69	0.09955	79049	7869	376693	1375107	17.40
70 — 74	0.15296	71179	10888	329867	998413	14.03
75 — 79	0.22642	60292	13651	268323	668546	11.09
80 — 84	0.32849	46640	15321	195157	400223	8.58
85+	1.00000	31319	31319	205066	205066	6.55

第九次(民國88~90年)臺灣地區國民生命表男性

年齡 X	生存數 lx	死亡數 dx	生存機率 px	死亡機率 qx	定常人口 Lx	 Tx	平均餘命 ex
日 Day							
0	100000	257	0.99743	0.00257	1915	7378929	73.79
7	99743	57	0.99943	0.00057	1912	7377013	73.96
14	99686	30	0.99970	0.00030	1911	7375101	73.98
21	99656	21	0.99979	0.00021	1911	7373190	73.99
28	99635	63	0.99937	0.00063	8732	7371279	73.98
月 Month							
2	99572	40	0.99960	0.00040	8182	7362546	73.94
3	99532	88	0.99912	0.00088	24531	7354364	73.89
6	99444	83	0.99917	0.00083	50382	7329832	73.71
年 Year							
0	100000	638	0.99362	0.00638	99478	7378929	73.79
1	99362	85	0.99915	0.00085	99319	7279450	73.26
2	99277	62	0.99938	0.00062	99246	7180131	72.32
3	99215	44	0.99956	0.00044	99193	7080885	71.37
4	99171	32	0.99967	0.00033	99155	6981691	70.40

台灣男性年金生命表（2002）

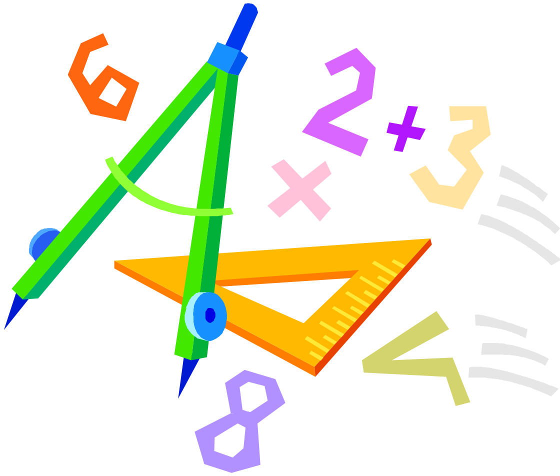
i = 2.00%

年齡	*Qx*	*lx*	*dx*	*Cx*	*Dx*	*Mx*	*Nx*
0	.00340	10,000,000	34,060	33724.425	10000000.000	2102236.334	403842268.834
1	.00074	9,965,940	7,325	7110.585	9770529.412	2068511.908	393842268.834
2	.00051	9,958,615	5,049	4805.145	9571909.875	2061401.323	384071739.423
3	.00036	9,953,566	3,563	3324.766	9379467.566	2056596.178	374499829.547
4	.00027	9,950,003	2,657	2430.153	9192264.428	2053271.412	365120361.982
5	.00023	9,947,346	2,268	2033.954	9009617.738	2050841.259	355928097.554
6	.00020	9,945,078	2,009	1766.276	8830944.652	2048807.305	346918479.816
7	.00018	9,943,069	1,810	1559.878	8656040.002	2047041.029	338087535.164

生命表基本函數

- 生存數 l_x
- 死亡數 ${}_nd_x$
- 死亡率 q_x 及存活率 p_x
- 定常人口 L_x 及 T_x
- 其他基本函數

  →平均餘命 $\mathring{e}_x$



- 生存數 l_x

→生存數可視為生命表之根本，表示某一定值的出生數，隨著年齡生長而剩餘的生存人數。

→通常生命表中假設 $l_0 = 100{,}000$，也就是一開始（0歲時）有十萬名活產的嬰兒，稱為生命表的基數(Radix)。

→若個體間視為互相獨立，則存活至 x 歲的人數 l_x 為二項分配 $B(l_0,S(x))$的變數。

其中$S(x)$ 為存活函數：

$$S(x) = 1 - F_X(x) = P(X > x)\ ,\ x \geq 0。$$

- 死亡數 ${}_n d_x$

→死亡數由生存數計算而得，${}_n d_x$ 表示 l_0 個嬰兒在 x 至 $x+n$ 歲死亡的期望人數。

$$ {}_n d_x = l_x - l_{x+n} = l_0 \times [S(x) - S(x+n)]. $$

→生命表中通常只列出 $n=1$的相關數值，紀錄 $n=1$的數值時會略去左下標，只以d_x 紀錄。也就是 $d_x = l_x - l_{x+1}$，因此

$$ l_x = \sum_{y=x}^{\infty} d_y \quad 與 \quad l_0 = \sum_{y=0}^{\infty} d_y \quad 。 $$

→死亡率與存活率也可由 d_x 與 l_x 表示：

$$ p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}, \quad q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}. $$

其它死亡率相關符號及關聯

$${}_x p_0 = S(x)$$

$${}_{t|s} q_x = P(t < T(x) < t+s) = \frac{S(x+t)}{S(x)} - \frac{S(x+t+s)}{S(x)}$$

$$= \frac{S(x+t)}{S(x)}\left[1 - \frac{S(x+t+s)}{S(x+t)}\right]$$

$$= {}_t p_x \; {}_s q_{x+t}$$

- 定常人口(Stationary Population)

→若生命表中的 l_0 個新生嬰兒，其出生時間均勻分散在一年的任一時間，而每年都有l_0 個新生嬰兒，則在任一時間觀察到的 x 至 x+1歲的人數平均約為L_x人，以符號表示

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t}\,dt.$$

→ T_x 則為 x 歲以上的所有人口

$$T_x = \sum_{y=x}^{\infty} L_y = \int_0^{\infty} l_{x+t}\,dt.$$

全體人口則為T_0。

- 死亡分配的特例：

→均勻死亡(Uniform distribution of death;UDD)

$$l_{x+t} = (1-t)\, l_x + t \cdot l_{x+1} \quad , 0 \le t \le 1$$

表示各年齡生存人數隨年齡直線下降。

→在此假設下，定常人口等於

$$L_x = l_x - \frac{1}{2} d_x = \frac{1}{2}(l_x + l_{x+1}).$$

→均勻死亡假設對死亡率而言，

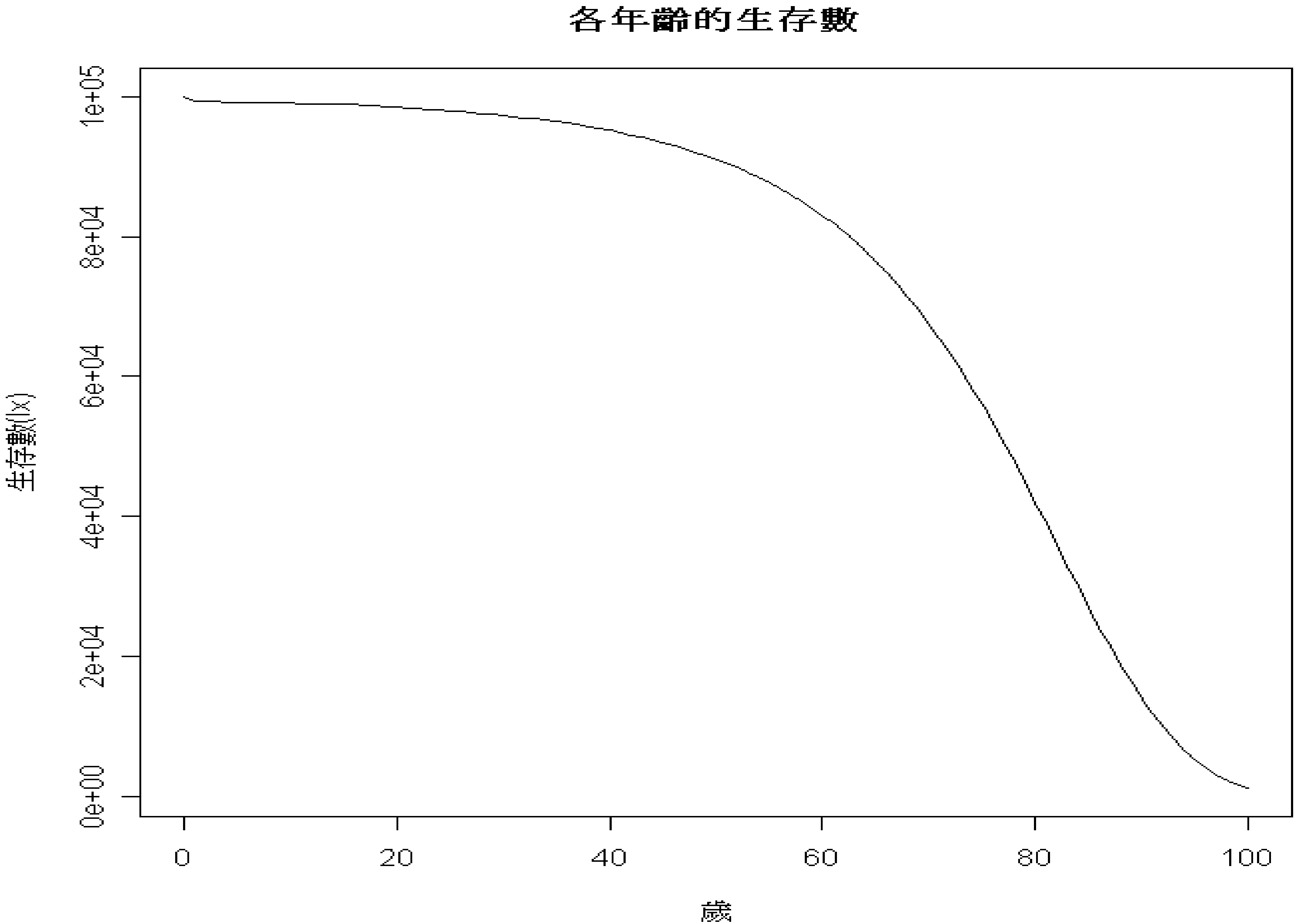
$${}_t q_x = t \cdot q_x$$

- 平均餘命(Expectation of Life)

→平均餘命 $\overset{o}{e}_x$ 為生命表中已存活至 x 歲的人，未來預期可存活的年數；在 $x=0$時，$\overset{o}{e}_x$ 代表的即是平均壽命。

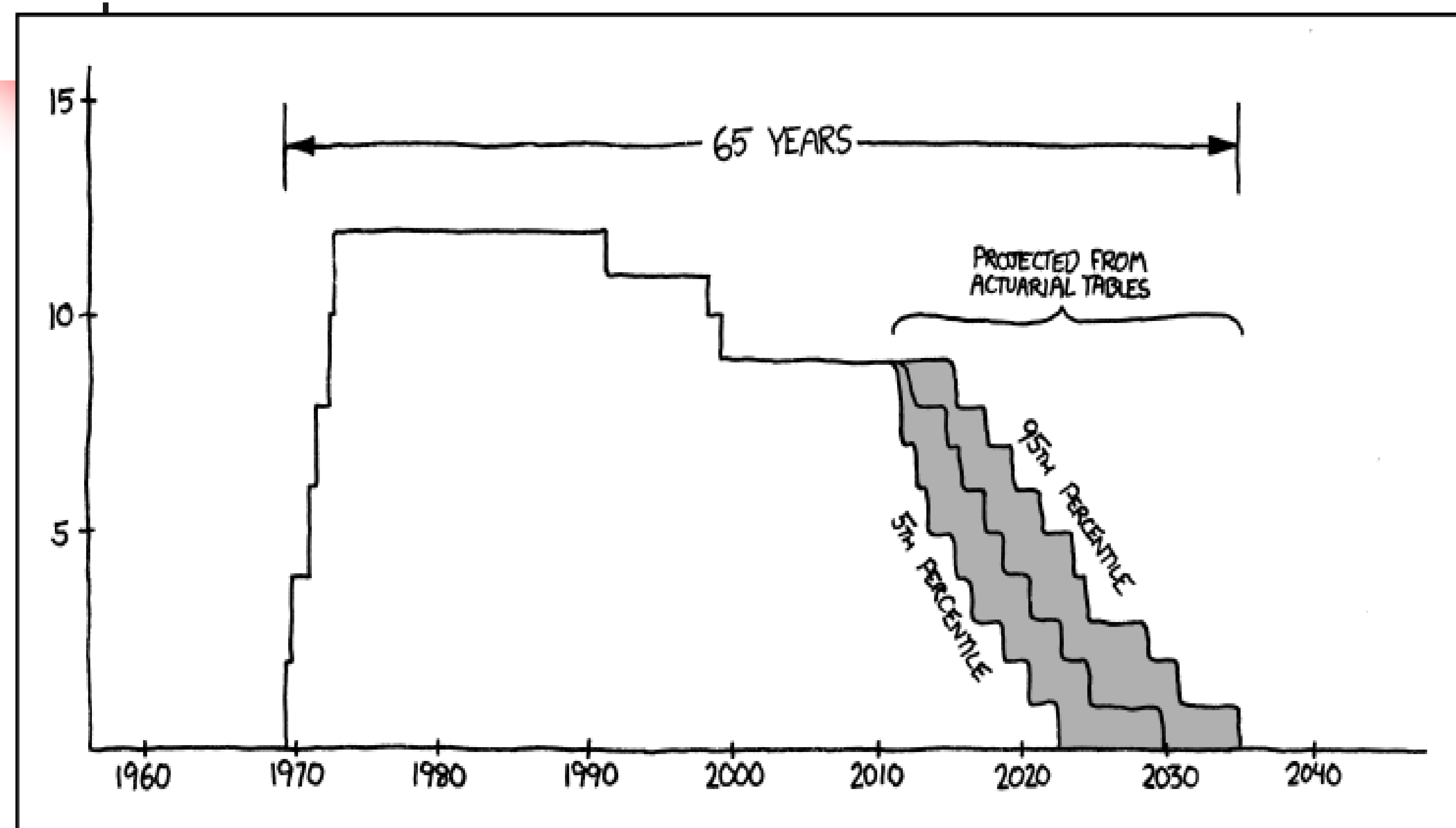
→在定常人口(Stationary Population)的假設下：

$$\overset{o}{e}_x = \frac{T_x}{l_x}$$

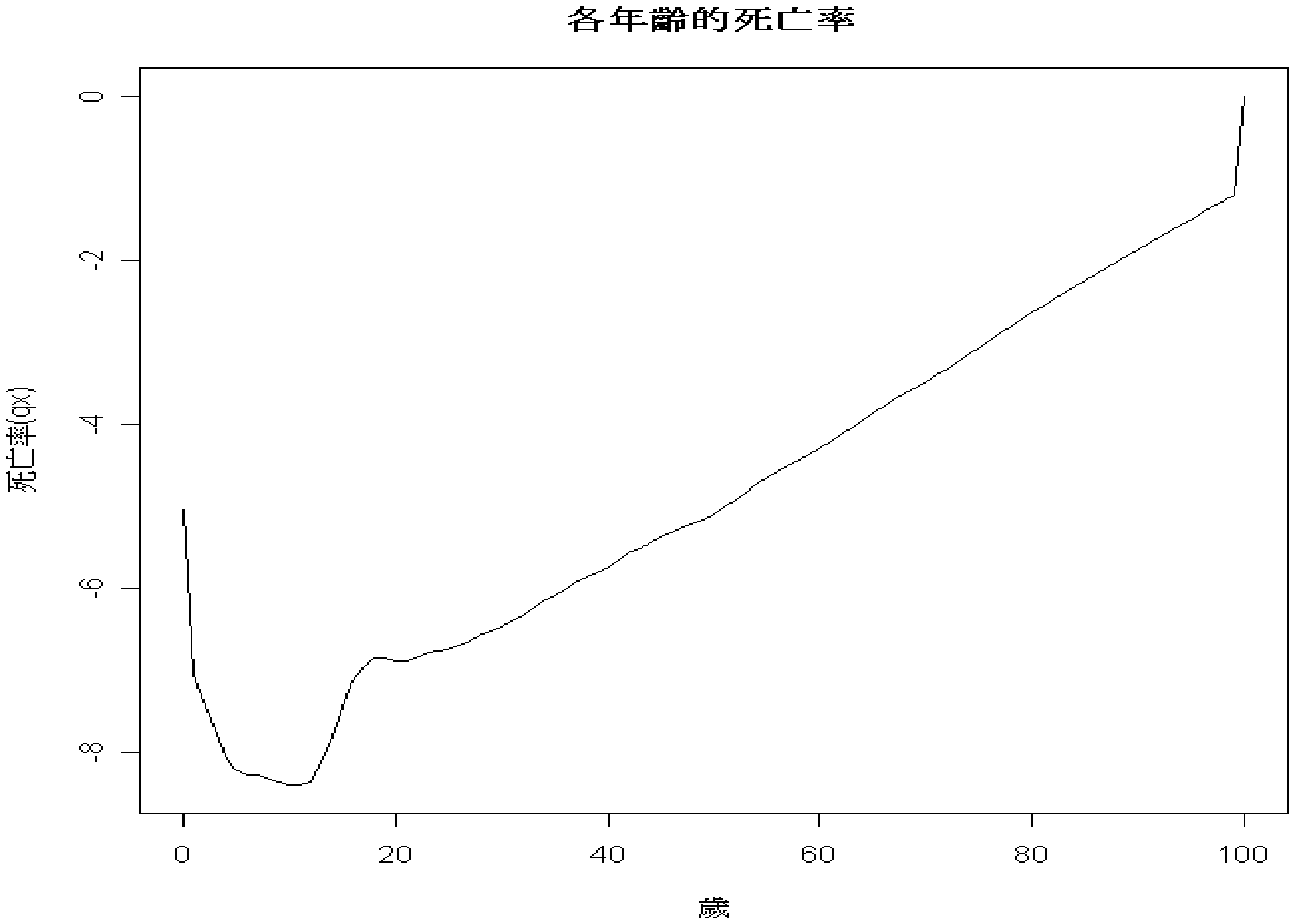


1999-2001年臺灣地區國民生命表(男)

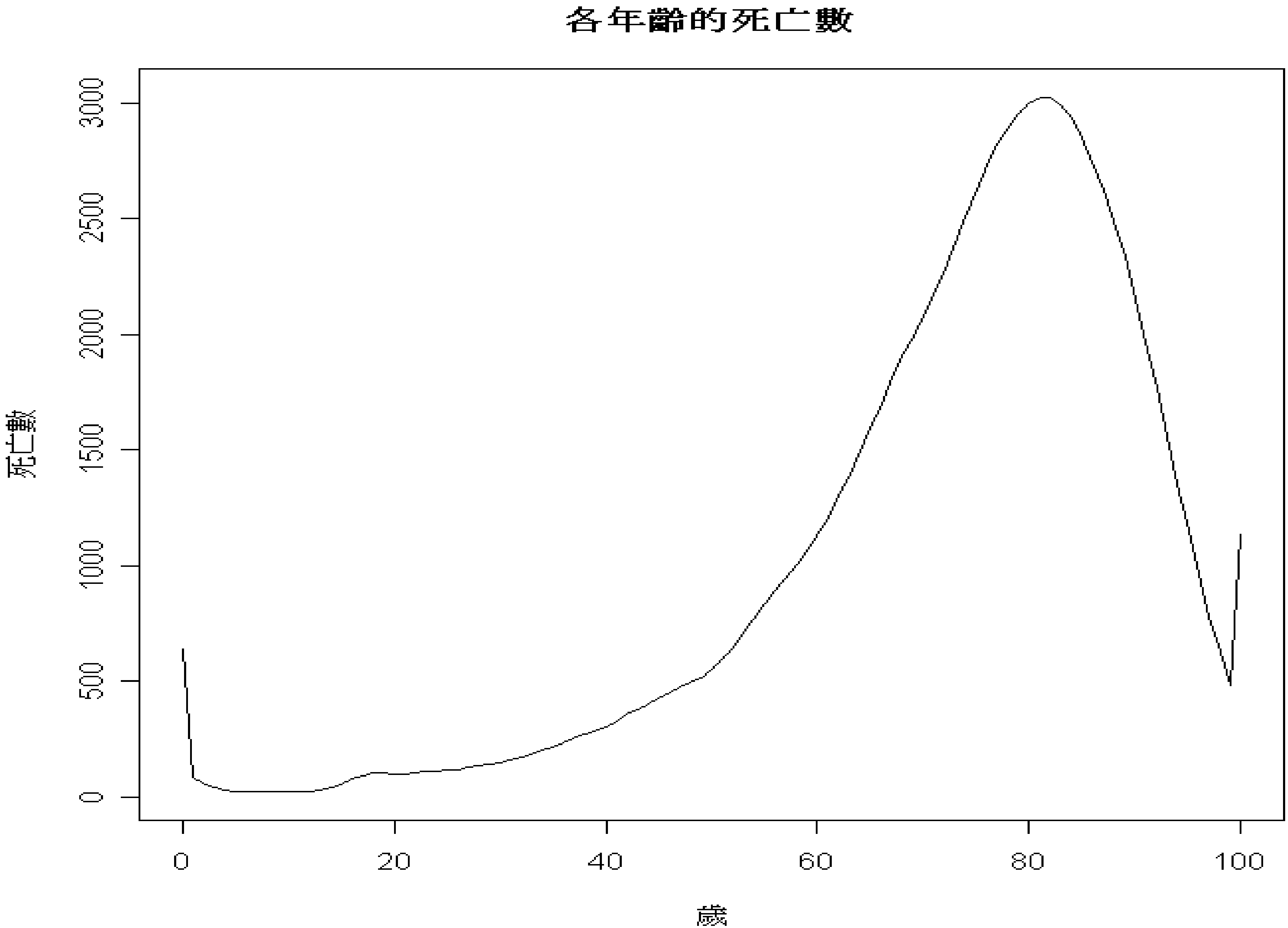
存活數的相關漫畫



NUMBER OF LIVING HUMANS WHO HAVE WALKED ON ANOTHER WORLD



1999-2001年臺灣地區國民生命表(男)

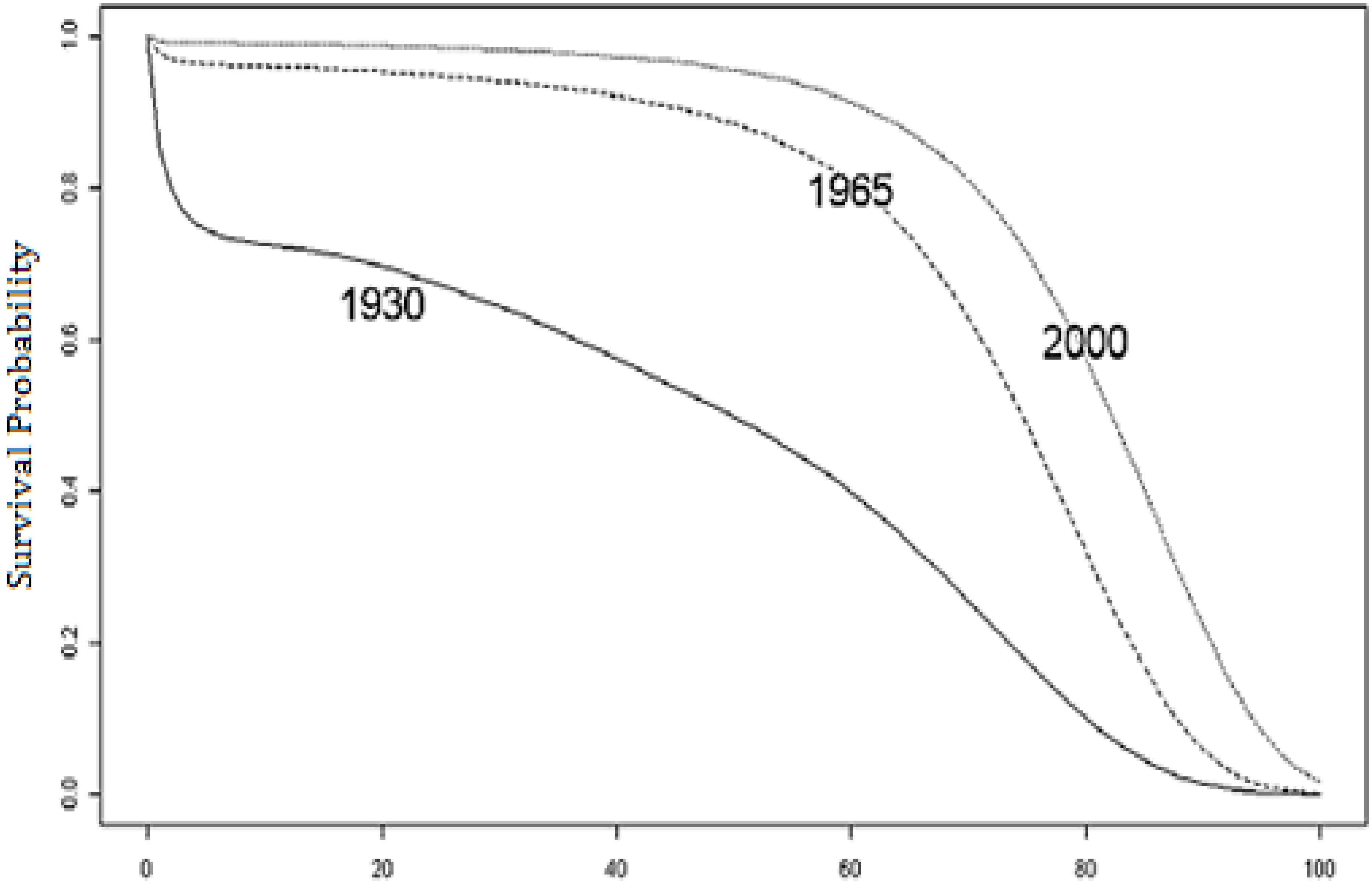


1999-2001年臺灣地區國民生命表(男)

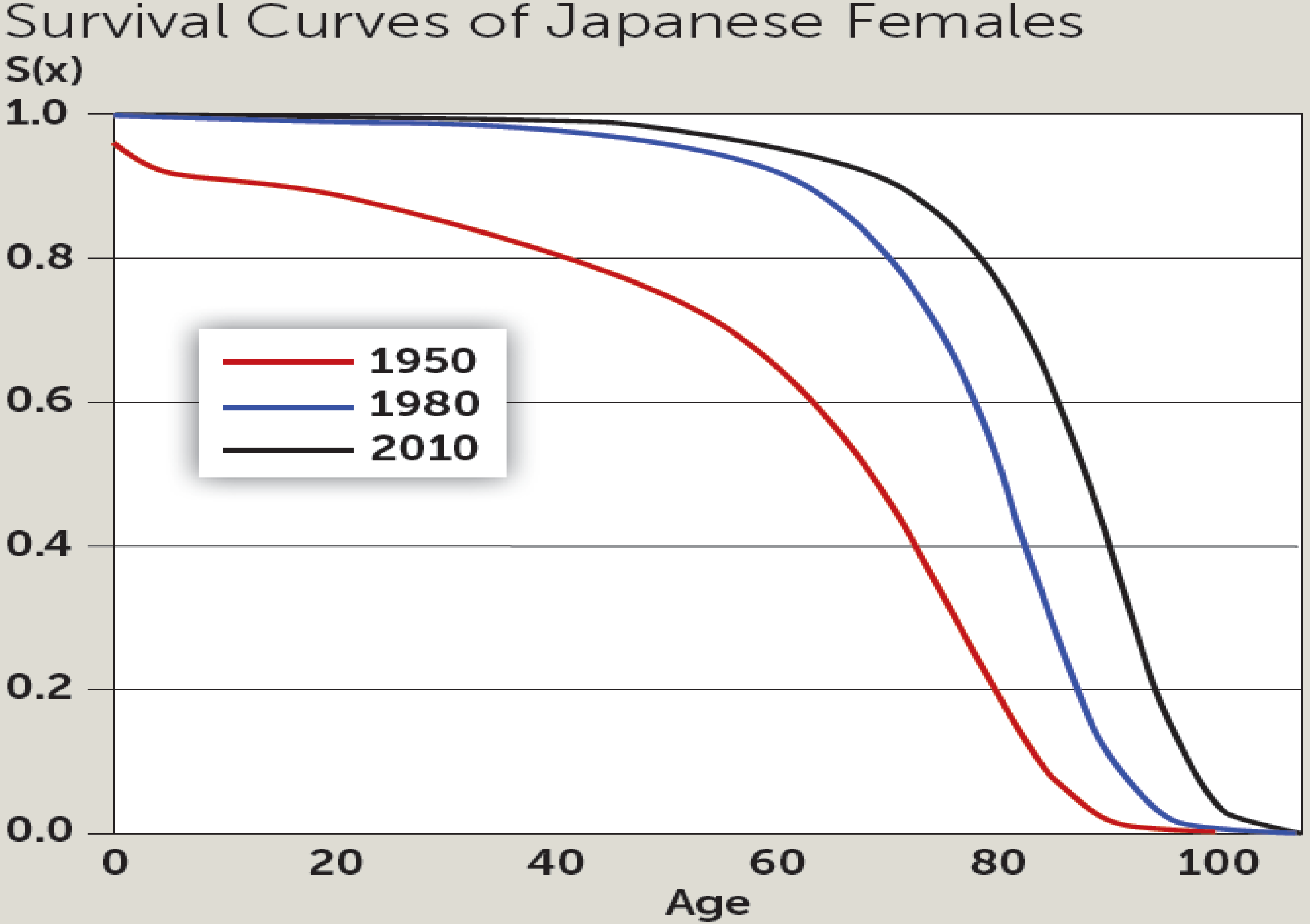
死亡壓縮(Mortality Compression)

根據存活曲線及死亡人數，近年有學者提出以下壽命理論：

- 存活曲線矩形化(Rectangularization)，(Wilmoth and Horiuchi, 1999)
- 死亡人數集中(Concentrated age-relating death)有縮小的趨勢，亦即死亡年齡的標準差漸趨收斂(Kannisto, 2000)。



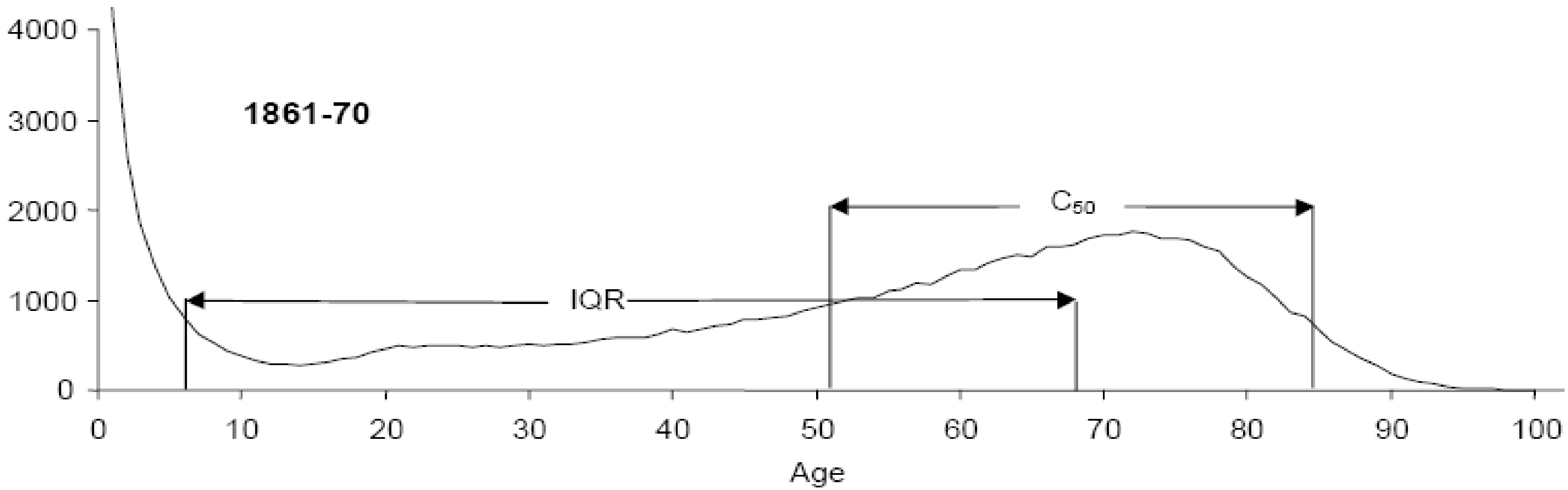
存活曲線矩形化(臺灣女性存活曲線)

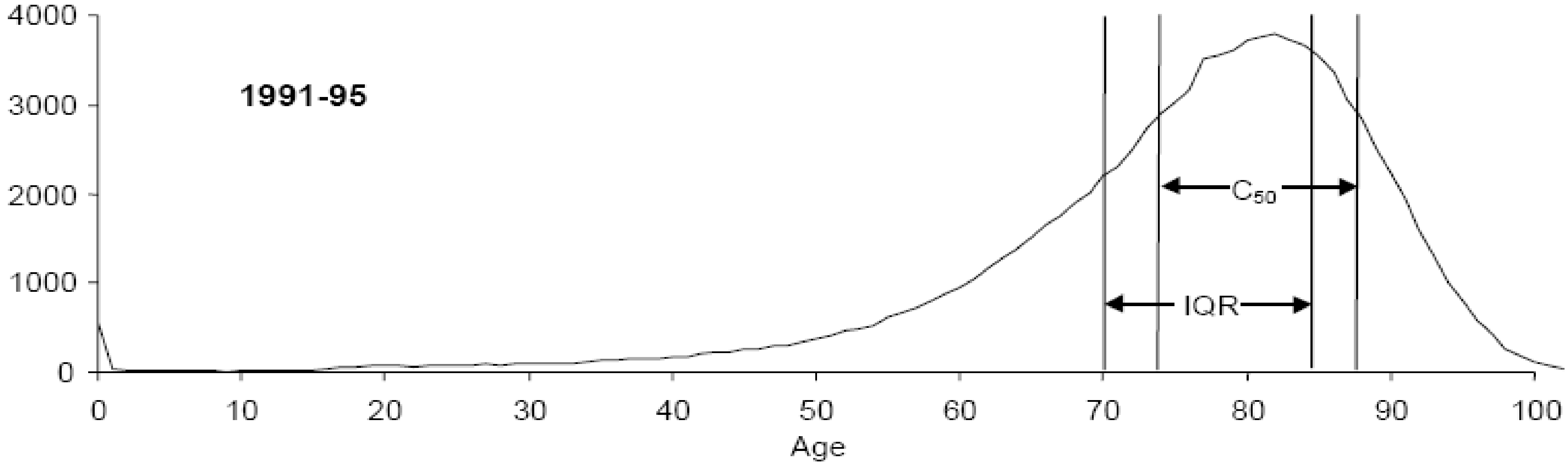


存活曲線矩形化(日本女性存活曲線)

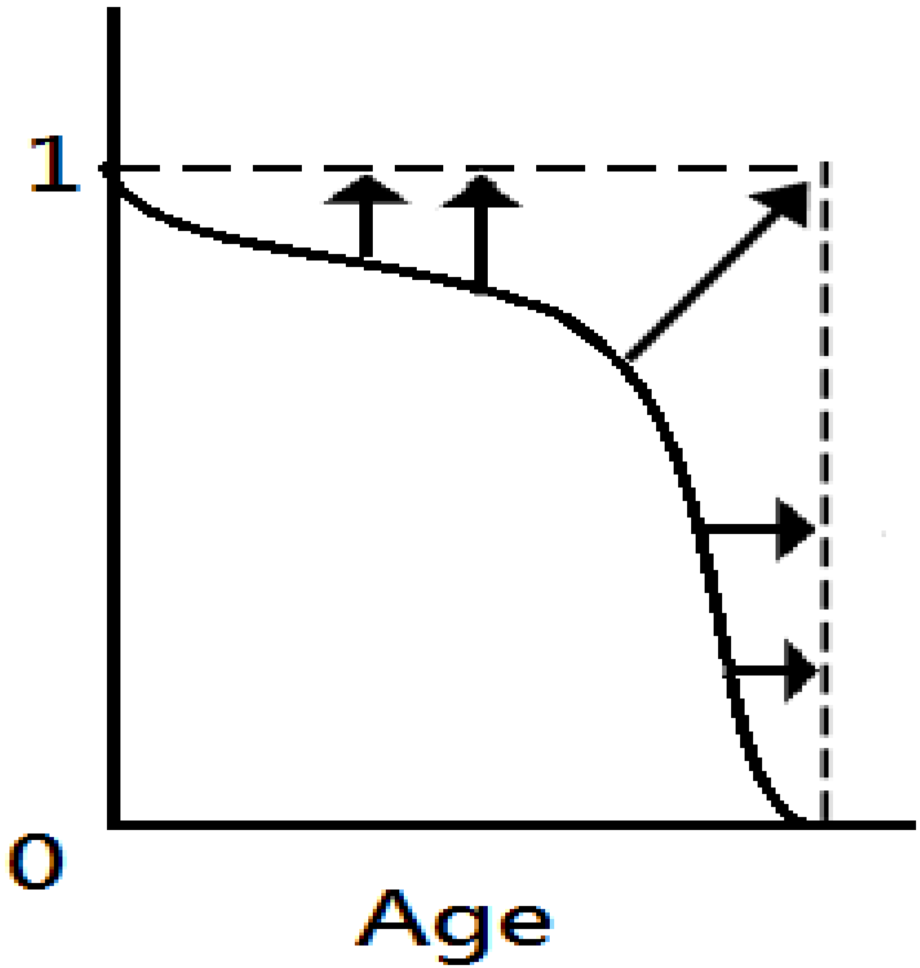
Distribution of deaths by age. IQR and C50. Sweden, Male, 1861-70 and 1991-95.

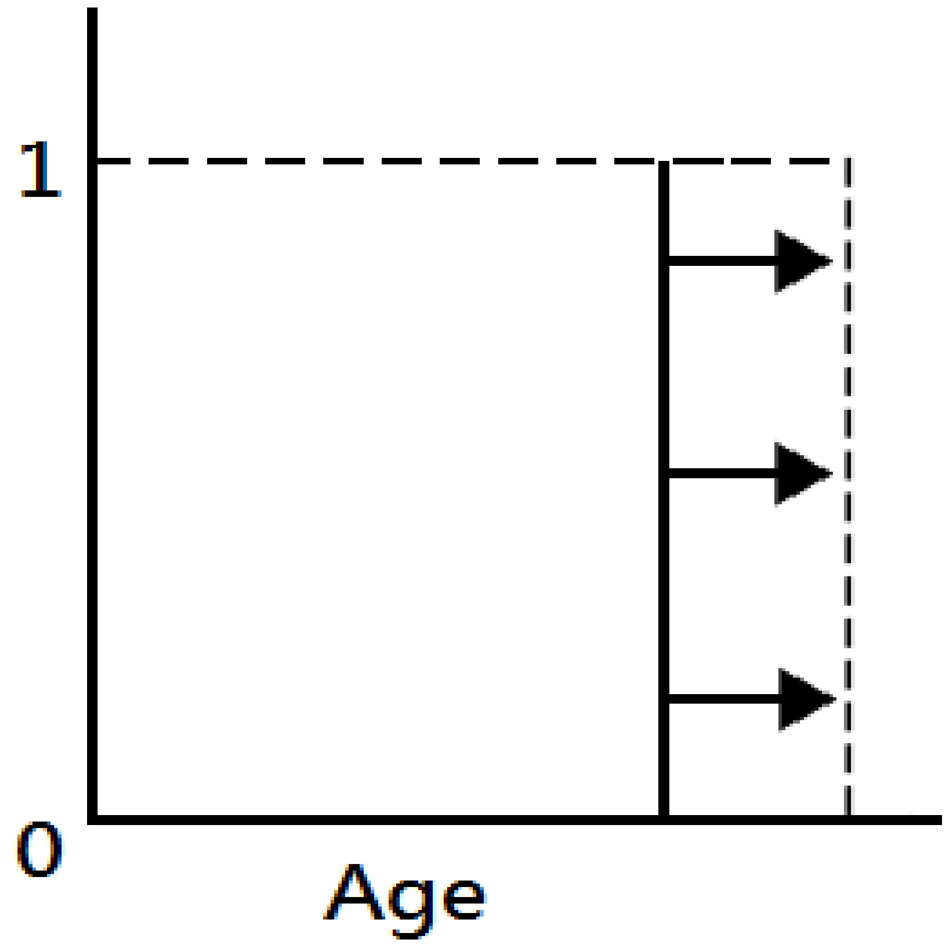
死亡年齡的標準差漸趨收斂(瑞典男性)





人類壽命的兩種理論



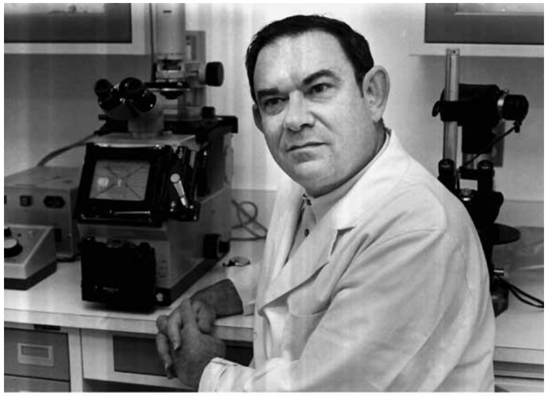


There is a Limit vs. No Limits

黑弗克極限(Hayflick Limit)

過去在學術界瀰漫著「正常脊椎動物的細胞，只要在最適宜的環境下進行培養，將永生不死」之概念。提出理論的諾貝爾獎得主卡爾(Carrel)，據說他主持的實驗室，成功地培養雞心臟的纖維母細胞長達34年。

然而，黑弗克在1960年前後的一連串實驗發現，他實驗室裡正常的人類纖維母細胞，在分裂了50多代之後，就停止複製、而凋零死亡。



Nature Reviews | Molecular Cell Biology

來源：http://blog.roodo.com/thinkfly/archives/2254977.html

死亡壓縮(Mortality Compression)

- Fires(1980)認為歐美已開發國家的存活曲線有漸趨矩形化(Rectangularization)的現象，他認為未來平均壽命已經接近可能的壽命上限，並預測人類在晚年罹患疾病的時間將縮短。

→疾病壓縮(Morbidity Compression)

註：如何驗證或測量死亡壓縮？

如何測量存活曲線矩形化？

死力 μ_x (瞬間死亡率;Force of Mortality)

- 連續變數可用機率分配函數描述其瞬間變化的程度，異於離散變數(Discrete variables)。當存活時間為連續變數時，也可考慮死亡率的瞬間變化：

$$\mathrm{P}(\mathrm{x} < \mathrm{X} \le \mathrm{x} + \Delta x \mid X > x) = \mathrm{P}(0 < \mathrm{T}(\mathrm{x}) \le \Delta x)$$

$$= \frac{S(x) - S(x+\Delta x)}{S(x)}$$

$$= -\frac{S'(x)}{S(x)} \cdot \Delta x$$

因此

$$\mu_x = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{{}_{\Delta t}q_x}{\Delta t}\right) = -\frac{S'(x)}{S(x)} = -\frac{1}{S(x)} \cdot \frac{dS(x)}{dx}.$$

將 dx 移至等號左側，

$$\int \mu_x dx = \int -\frac{1}{S(x)} dS(x) = -\log(S(x))$$

$$\Leftrightarrow \quad S(x) = \exp(-\int \mu_x dx).$$

換言之，

$${}_n p_x = \exp(-\int_0^n \mu_{x+t} dt).$$

將存活時間以隨機變數的形式表達，因為

$$_tq_x = 1 - {}_tp_x = P(T(x) \le t),$$

可視為CDF，對時間 t 微分可得PDF：

$$\frac{d}{dt}({}_tq_x) = -\frac{d}{dt}({}_tp_x) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{S(x+t)}{S(x)}\right)$$

$$= -\frac{1}{S(x)}(-\mu_{x+t} \cdot S(X+t)) = {}_tp_x\,\mu_{x+t}.$$

換言之，${}_tp_x\,\mu_{x+t}$ 可視為存活時間的PDF。

- 代入PDF，死亡機率也可寫成

$$ {}_n q_x = \int_0^n \mu_{x+t}\ p_{x+t}\, dt. $$

- 以連續變數的型態，定常人口可表為

$$ L_x = \int_0^1 l_{x+t} dt = l_x \int_0^1 {}_t p_x dt. $$

x 歲的人之平均餘命等於

$$ \overset{o}{e}_x = \frac{T_x}{l_x} = \frac{l_x \int_0^\infty {}_t p_x\, dt}{l_x} = \int_0^\infty {}_t p_x\, dt. $$

- 將x 歲的人之存活時間以 T表示，則

$$E(T) = \overset{o}{e}_x$$

$$Var(T) = \int_0^\infty t^2 \mu_{x+t} \ {}_t p_x \, dt - (\overset{\circ}{e}_x)^2$$

$$= 2\int_0^\infty t \ {}_t p_x \, dt - (\overset{\circ}{e}_x)^2.$$

- E(T) 及 Var(T) 不見得存在。

→例如：$S(x) = (1+x)^{-1}$

或 $S(x) = (1+x)^{-2}$ 。

非整數年齡(Fractional Ages)的假設

- 生命表只有整數年齡的機率分配，因此必須加上非整數年齡的函數假設，才能建構連續變數的機率分配。
- 常見的非整數年齡的假設有三種，在給定整數年齡x與$x+1$的數值後，在以內插法求得x與$x+1$間的數值：

→線性內插(Linear Interpolation)

→指數內插(Exponential Interpolation)

→調和內插(Harmonic Interpolation)

- 線性內插：$(0 \le t \le 1)$

  存活函數滿足

$$S(x+t)=(1-t)\cdot S(x)+t\cdot S(x+1)$$

  也就是常見的算術平均，在人口統計學則稱為均勻的死亡分配(U.D.D.)

- 在這個假設下較重要的特性是${}_t p_x$ 為 t 的線性函數：

$${}_t q_x = t\cdot q_x.$$

- 指數內插：$(0 \le t \le 1)$

  存活函數滿足

$$S(x+t) = S(x)^{1-t} \times S(x+1)^{t}$$

也就是常見的幾何平均，因為在這個假設下死力$\mu_x = \mu$，因死又稱為定死力(Constant Force of Mortality)。

- 在這個假設下較重要的特性是：

$$ {}_t p_x = (p_x)^t . $$

- $\log(S(x+t)) = (1-t)\log(S(x)) + t\log(S(x+1)).$

- 調和內插：$(0 \le t \le 1)$

  存活函數滿足

$$\frac{1}{S(x+t)} = \frac{1-t}{S(x)} + \frac{t}{S(x+1)},$$

  又稱為雙曲線(Hyperbolic)假設。

- 在這個假設下較重要的特性是：

$${}_{1-t}q_{x+t} = (1-t)q_x.$$

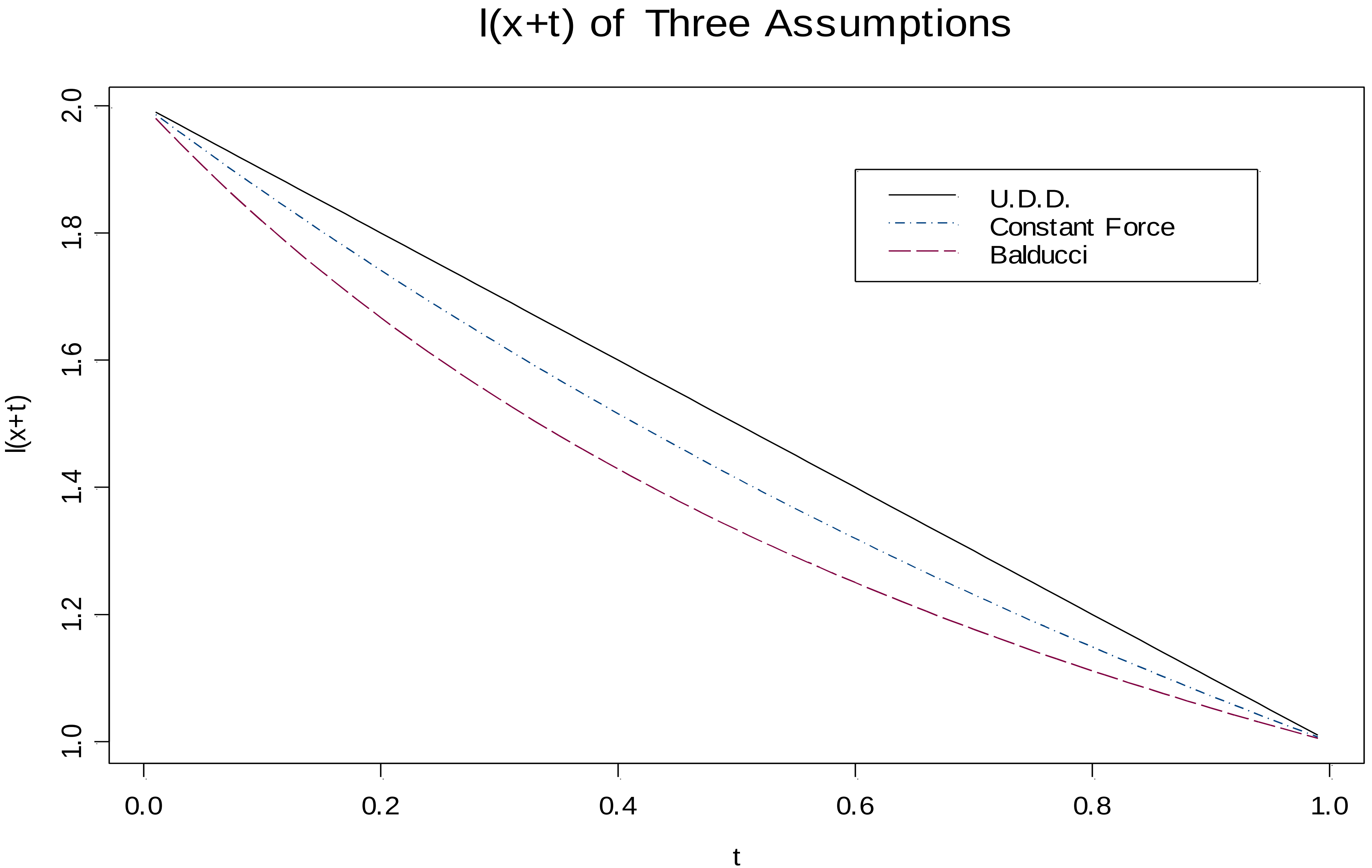
終壽區間成數(Fraction of the Last Age Interval of Life)：假設 $a_x = 1/2$ (U.D.D.)

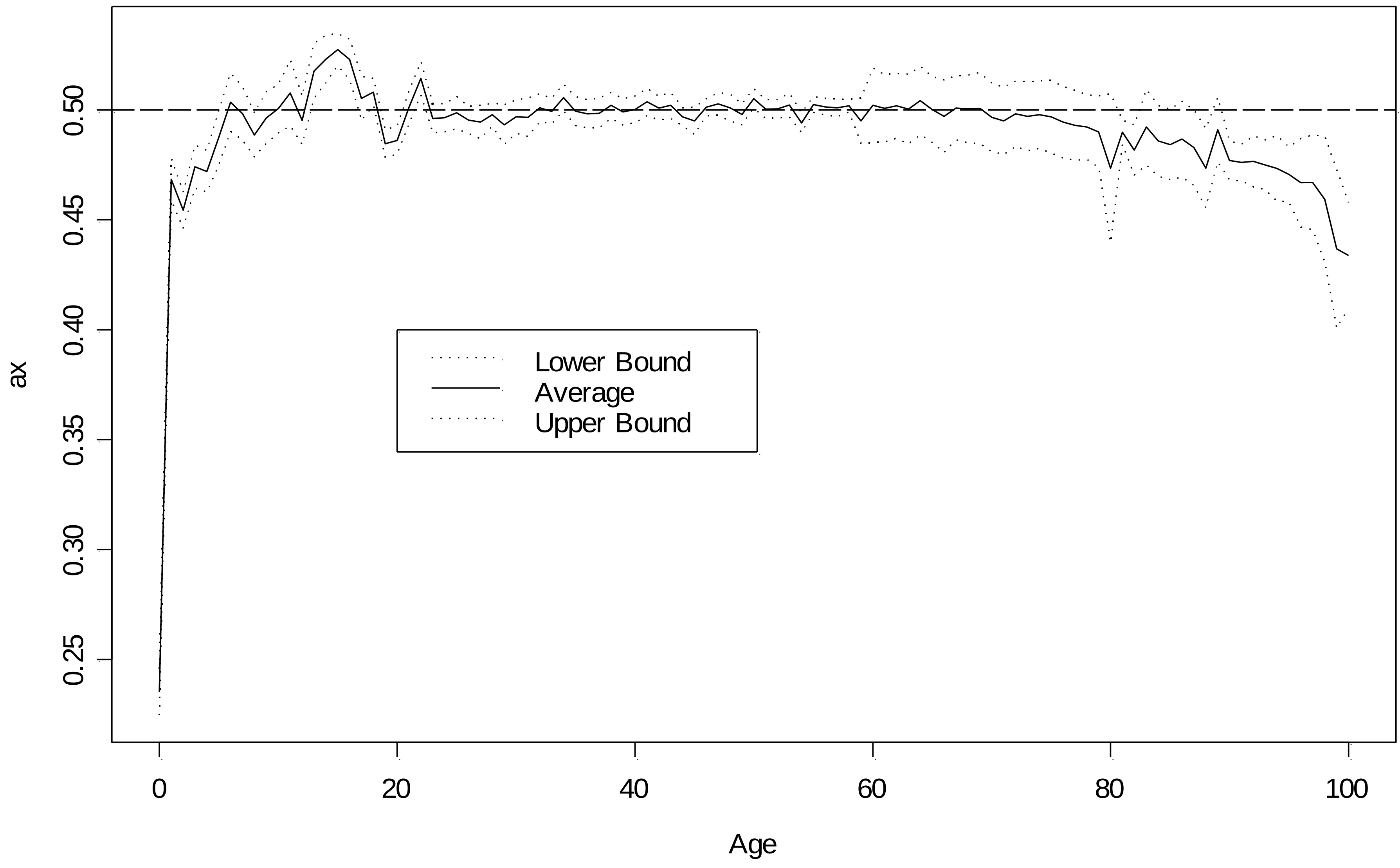
其中 $$L_x = \int_0^1 l_{x+t}\, dt = l_{x+1} + a_x\, d_x$$

→ 根據 Chiang(蔣慶琅,1984) 對世界26個國家的計算結果，在0至4歲都發現 $a_x < 1/2$，尤其是0歲時最明顯。

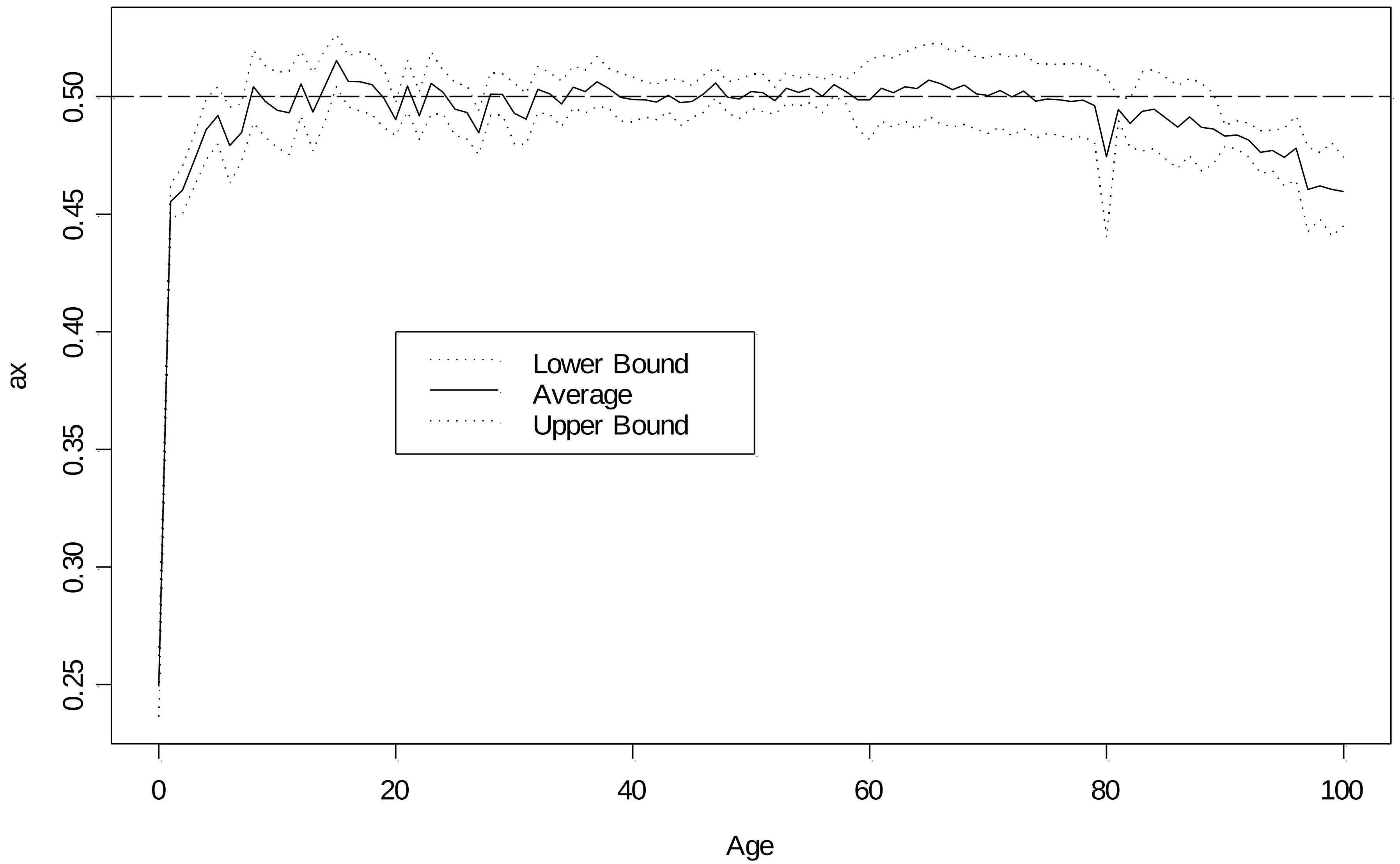
不同死亡假設下的終壽區間成數a_x

$$a_x^U = 0.5,\ a_x^C \cong 0.442,\ a_x^B \cong 0.385$$





臺灣各年齡終壽區間成數(1971~2000年男性)



臺灣各年齡終壽區間成數(1971~2000年女性)

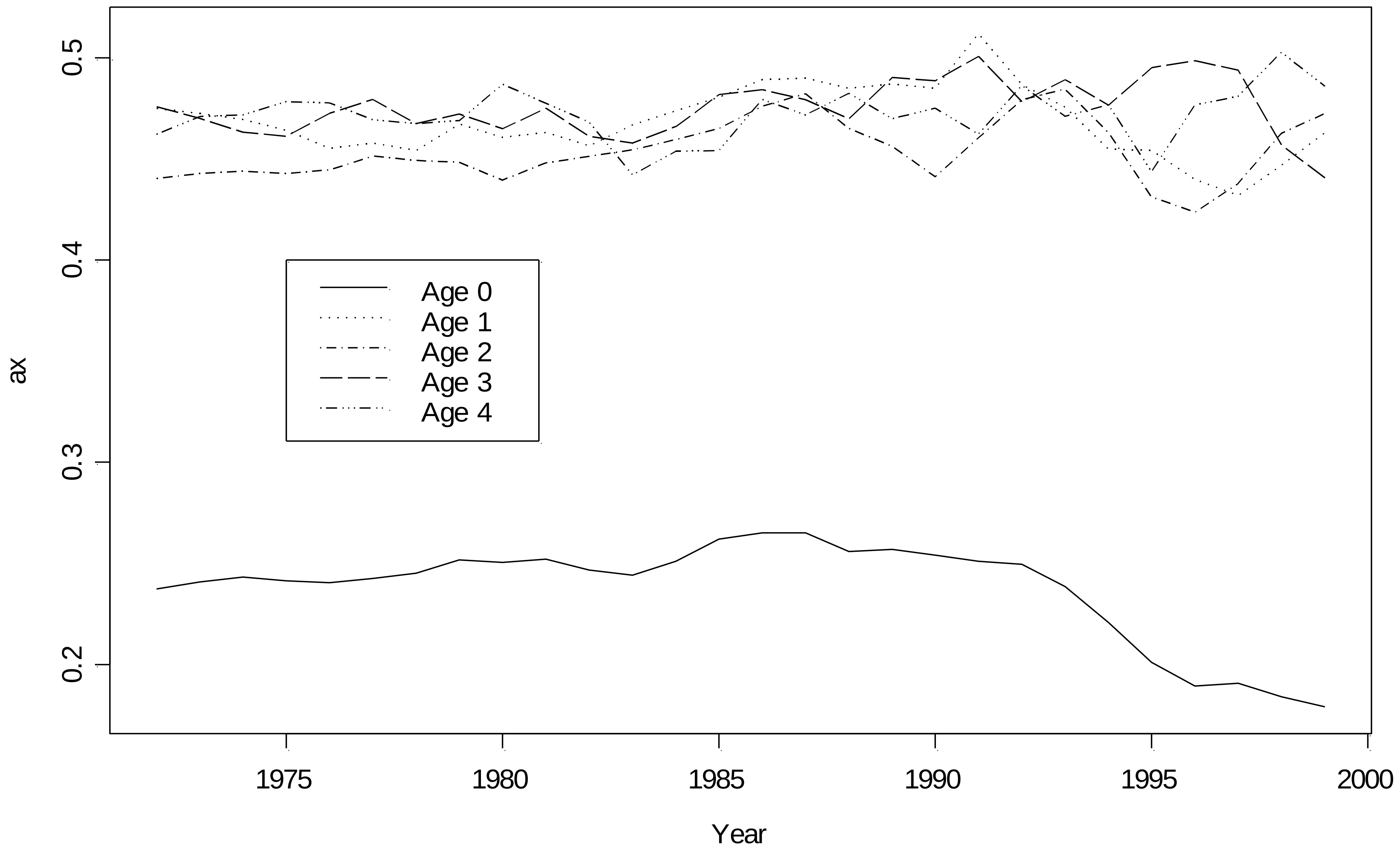
- 上兩圖為男、女性單一年齡組的終壽區間成數的平均數及95%信賴區間的上下限。

→不大於5歲的終壽區間成數可視為小於0.5;

→5~80歲終壽區間成數大約等於0.5；

→80歲後則又小於0.5，且隨年齡增加呈現緩慢遞降的趨勢。

- 可藉由 t 檢定，或是無母數方法中的Wilcoxon符號等級檢定來檢查。



1971~2000年0~4歲終壽區間成數(男性；3年移動平均)

1971~2000年0~4歲終壽區間成數(女性；3年移動平均)

- 1歲至4歲的 a_x 在民國60~89年間大致為定值。
- 0歲的終壽區間成數則呈現不同的趨勢，在民國80年前的走勢大致穩定，民國80年後則逐漸下降。

→兩者有顯著差異；

→民國60至79年的 a_0 約為0.25；

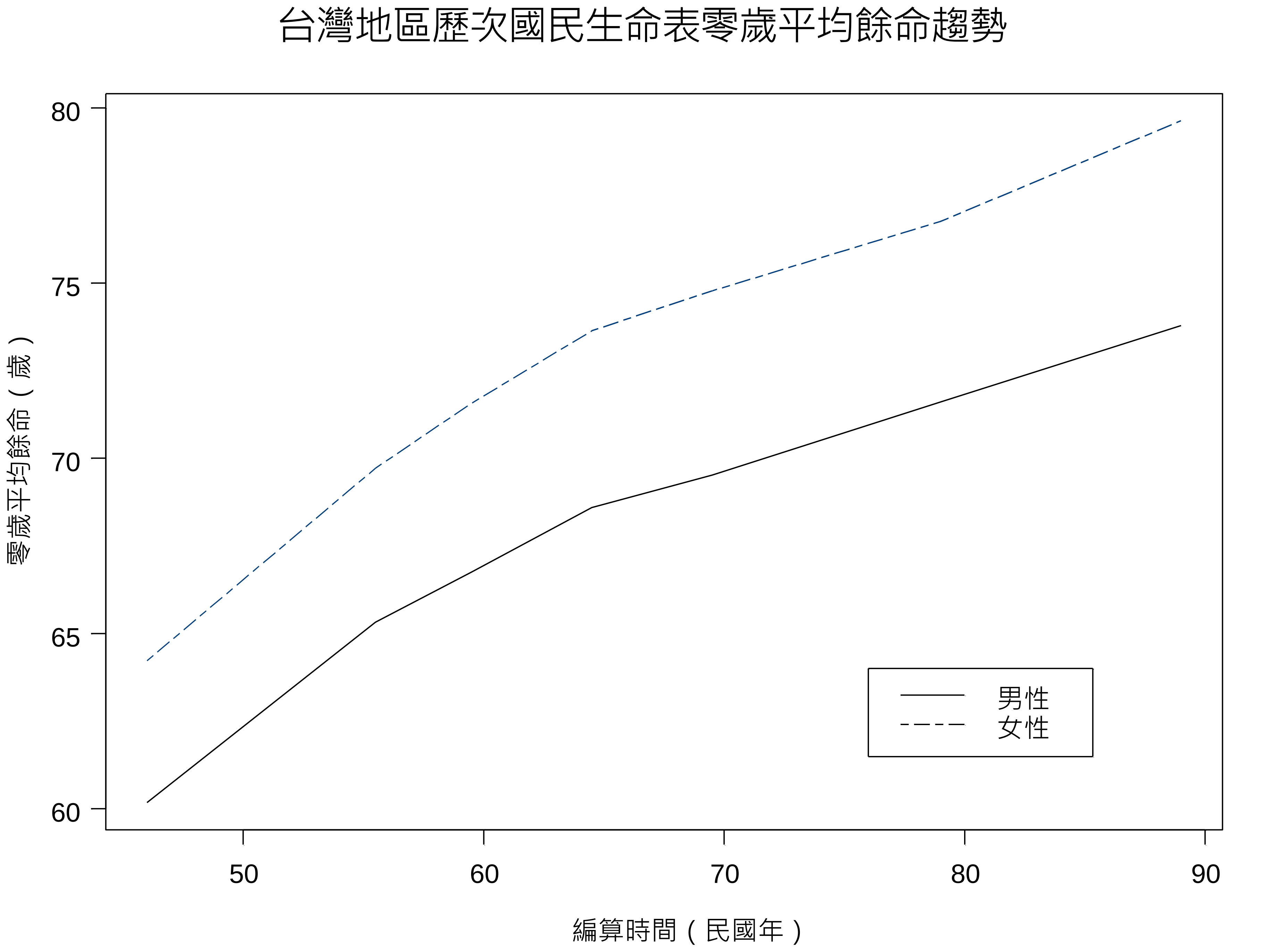
→民國80至89年的 a_0 約為0.21。

(但與WHO建議的數值仍有差異。)

每萬名嬰兒的死亡數	a_0的數值
小於20人	0.09
20至40人	0.15
40至60人	0.23
60人以上	0.30

世界衛生組織建議的a_0

註：2002年台灣地區的男、女嬰死亡率分別為千分之6.83 及千分之 5.74。



台灣地區歷次國民生命表零歲平均餘命趨勢
80
75
70
65
60
零歲平均餘命（歲）
50
60
70
80
90
編算時間（民國年）
男性
女性

死亡法則(Law of Mortality)

- 生命表中的死亡趨勢若可用函數型態表示，則有關生命的各種相關資訊也可簡單算出。
- 常見的死亡法則有

→DeMoivre : $S(x) = 1 - \frac{x}{w}, \quad x \le w$

→Gompertz : $\mu_x = BC^x, B > 0, C > 1$

→Makeham : $\mu_x = A + BC^x, A > -B$

→Weibull : $\mu_x = kx^n, k > 0, n > 0$

指數分配的特性

- 例題一、假設死亡率服從指數分配Exp(μ)，亦即 $f(x)=e^{-\mu x}$。

→因為存活機率滿足(與年齡 x 無關)

$$ {}_t p_x = P(X > x+t \mid X > x) = e^{-\mu t} $$

因此死力 μ_x =1 且平均餘命也與年齡無關：

$$ \overset{o}{e}_x = \int_0^\infty t\,{}_t p_x\,\mu_{x+t}\,dt = \int_0^\infty \mu\,t\,e^{-\mu t}\,dt $$

$$ = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty y e^{-y}\,dy = \frac{1}{\mu} $$

DeMoivre's Law的特性

- 例題二、死亡率滿足 l_x=100–x, 0 < x < 100，試求平均餘命 $\mathring{e}_x$ (UDD假設)。

→由題目可知死亡率滿足DeMoivre's Law，可推得

$$ {}_t p_x = \frac{w-x-t}{w-x} = 1 - \frac{t}{w-x}, \quad \mu_{x+t} = \frac{1}{w-x-t} $$

因此，

$$ \mathring{e}_x = \int_0^{w-x} t \, {}_t p_x \, \mu_{x+t} \, dt = \frac{1}{w-x} \int_0^{w-x} t \, dt $$

$$ = \frac{w-x}{2} $$

- 例題二(續)、同理可得出死亡率

$$q_x = \int_0^1 {}_tp_x \mu_{x+t} dx = \frac{1}{w-x}$$

亦即每年死亡率均勻折損。

另外，UDD假設下的定常人口滿足

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t} dt = \int_0^1 [(1-t)l_x + t l_{x+1}] dt = l_x - \frac{1}{2} d_x$$

因此中央死亡率 $$m_x = \frac{d_x}{L_x} = \frac{d_x}{\int_0^1 l_{x+t} dt} = \frac{d_x}{l_x - \frac{1}{2} d_x}$$

$$= \frac{d_x / l_x}{1 - \frac{1}{2} d_x / l_x} = \frac{q_x}{1 - \frac{1}{2} q_x}$$

定死力的特性

- 例題三、若死亡率滿足定死力$\mu_x = \mu$，則存活機率滿足

$$ {}_t p_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} = e^{-t\mu} $$

因此，

$$ \overset{o}{e}_x = \int_0^\infty t\,{}_t p_x\, \mu_{x+t} dt = \int_0^\infty t\mu e^{-t\mu}\, dt $$

$$ = \frac{1}{\mu} $$

註：換言之，定死力就是指數分配。

非整數年齡的函數假設

函數類型	假設種類 均匀分配 （算術平均）	定死力 （幾何平均）	雙曲線 （調和平均）
$S(x+t)$	$(1\text{-}t)\,S(x)+t\,S(x+1)$	$S(x)^{1-t}\,S(x+1)^{t}$	$\left[\dfrac{1-t}{S(x)}+\dfrac{t}{S(x+1)}\right]^{-1}$
${}_{t}q_{x}$	$t\,q_{x}$	$1-p_{x}{}^{t}$	$\dfrac{tq_{x}}{1-(1-t)q_{x}}$
${}_{1-t}q_{x+t}$	$\dfrac{(1-t)q_{x}}{1-tq_{x}}$	$1-p_{x}{}^{1-t}$	$(1-t)q_{x}$
μ_{x+t}	$\dfrac{q_{x}}{1-tq_{x}}$	$-\ell og(p_{x})$	$\dfrac{q_{x}}{1-(1-t)q_{x}}$
${}_{t}p_{x}$	$1-t\,q_{x}$	$p_{x}{}^{t}$	$\dfrac{p_{x}}{1-(1-t)q_{x}}$
${}_{s}p_{x+t}$	$\dfrac{sp_{x}}{1-tq_{x}}$	$1-p_{x}{}^{s}$	$\dfrac{sp_{x}}{1-(1-y-t)q_{x}}$
${}_{t}p_{x}\,\mu_{x+t}$	q_{x}	$-p_{x}{}^{t}\,\ell og\,p_{x}$	$\dfrac{q_{x}p_{x}}{[1-(1-t)q_{x}]^{2}}$

註：上述的參數滿足 (1) x 是整數　(2) $0<t<1$　(3) $0\le s\le 1$ 且 $s+t\le 1$

不同死亡法則下的死力與存活函數

原創者	μ_x	S(x)	限制條件
DeMoivre (1725)	$(\omega - x)^{-1}$	$1-\dfrac{x}{\omega}$	$0 \le x < \omega$
Gompertz (1825)	BC^x	$\exp[-m(c^x-1)]$	$B > 0, C > 1$, $x \ge 0$
Makeham (1860)	$A+BC^x$	$\exp[-Ax-m(c^x-1)]$	$B > 0, A \ge -B$ $C > 1, x \ge 0$
Weibull (1939)	$k\,x^n$	$\exp[-\mu x^{n+1}]$	$k > 0, n > 0$, $x \ge 0$

註：$m=\dfrac{B}{\ell ogC}$，$u=\dfrac{k}{n+1}$